Cadre : Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$.

I Action par translation : pivot de Gauss

1) Généralités

Définition 1. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche.

Définition 2. On appelle matrice de transvection toute matrice qui est de la forme $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$.

Définition 3. On appelle matrice de dilatation toute matrice qui est de la forme $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

Définition 4. On appelle matrice de permutation toute matrice qui est de la forme $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$, où $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$.

Remarque 5. *Ces matrices représentent également des transformations élémentaires dans l'algorithme du pivot de Gauss. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$:*

Opération	$T_{i,j}(\lambda)A$	$D_i(\lambda)A$	$P_{i,j}A$
Résultat	$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$	$L_i \leftarrow \lambda L_i$	$L_i \leftrightarrow L_j$

On a les opérations analogues sur les colonnes en multipliant à droite.

Exemple 6. $T_{3,2}(1) \times T_{3,1}(-3) \times T_{2,1}(-1) \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Définition 7. On appelle :

(i) pivot d'une ligne son coefficient non nul le plus à gauche.

(ii) matrice échelonnée en lignes une matrice telle que dès qu'une ligne est nulle, les suivantes sont nulles, et pour les lignes non nulles le pivot d'une ligne est strictement à droite du pivot de la ligne précédente. On dit qu'une matrice échelonnée est réduite si ses pivots valent 1.

On a la définition similaire de matrice échelonnée (réduite) en colonnes.

Proposition 8. *Les orbites sont en bijections avec les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$: $A \sim B \Leftrightarrow \operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} B$.*

Proposition 9. *Toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée.*

Lemme 10. *On suppose E de dimension $n \geqslant 2$. Soient $x, y \in E \setminus \{0\}$. Il existe une transvection u ou un produit de deux transvections uv, tel que $u(x) = y$ ou $uv(x) = y$.*

Théorème 11. *Les transvections engendrent $\mathcal{SL}(E)$.*

Théorème 12. *Les transvections et les dilatations engendrent $\mathcal{GL}(E)$.*

Application 13. *L'algorithme du pivot de Gauss permet de se ramener à la matrice réduite associée à une matrice via des opérations élémentaires sur les lignes.*

2) Application à la décomposition polaire

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n = p$, on considère l'action par translation de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 14 (Décomposition polaire)**.** *On a les homéomorphismes :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (O, S) & \longmapsto & OS \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ (U, H) & \longmapsto & UH \end{array}$$

Corollaire 15. *Pour $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, on a $|||A|||_2 = \sqrt{\rho({}^t\!AA)}$*

Corollaire 16. *Tout sous-groupe compact de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ qui contient le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est le groupe $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ lui-même.*

II Action de Steinitz : équivalence

Définition 17. Le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ par $(P, T) \cdot M = PMT^{-1}$. Deux matrices de la même orbites sont dites équivalentes.

Théorème 18. *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r, alors M est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Remarque 19. *L'algorithme du pivot total permet d'obtenir J_r.*

Corollaire 20. *Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont même rang.*

Corollaire 21. $\operatorname{rg}({}^t M) = \operatorname{rg}(M)$

Proposition 22. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En notant O_r l'orbite des matrices de rang r, on a que, pour tout $r \leqslant \min(n, p)$, $\overline{O_r} = \bigcup_{k \leqslant r} O_k$.*

Corollaire 23. *Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'unique orbite fermée est $O_0 = \{0\}$, et l'unique orbite ouverte est $O_{\min(n,p)}$. Si $n = p$, alors $O_n = \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

III Action par conjugaison : similitude

1) Généralités

Définition 24. Le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $P \cdot M = PMP^{-1}$. Deux matrices d'une même orbite sont dites conjuguées ou semblables.

Remarque 25. *Cette action traduit le changement de base. La réduction des endomorphismes consiste à trouver des représentants élémentaires des orbites de cette action.*

Proposition 26. *Le rang, le déterminant, la trace, les valeurs propres, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont des invariants de similitude.*

Remarque 27. *Ce n'est pas une caractérisation ! Par exemple, I_2 et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ont même polynôme caractéristique.*

2) Trigonalisabilité et diagonalisabilté

Définition 28. On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire).

Application 29. *Calcul de puissances : $(PAP^{-1})^n = PA^nP^{-1}$.*

Théorème 30. *Une matrice est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples (resp. scindé).*

Corollaire 31. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice est trigonalisable.*

3) Action de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, restreignons l'action par conjugaison à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 32. *Cette action traduit le changement de base orthonormée.*

Proposition 33. *Les valeurs propres (complexes) d'une matrice orthogonale sont des racines de l'unité.*

Lemme 34. *Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u.*

Lemme 35. *Pour $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, il existe un sous-espace vectoriel W_n de $\mathbb{R}^n$ tel que $\dim W_n \leqslant 2$ stable par M.*

Lemme 36. *Pour $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe des sous-espaces vectoriels $W_1, \dots, W_k$ de $\mathbb{R}^n$ stables par u tels que, pour tout i, $\dim W_i \leqslant 2$, et $E = \perp_{i=1}^k W_i$.*

Théorème 37. *Soit $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors M est semblable à :*

$$\begin{pmatrix} I_r & & & & 0 \\ & -I_m & & & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_{\theta_s} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \theta_i \in]0; 2\pi[\setminus \{\pi\} \\ R_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \end{cases}$$

IV Action par congruence

On suppose ici que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Définition 38. Le groupe $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ par $P \cdot S = PS\,{}^{t}P$. Deux matrices d'une même orbite sont dites congruentes.

Remarque 39. *Cette action traduit le changement de base pour les formes quadratiques.*

Théorème 40 (Sylvester)**.** *Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe $s, r \in \mathbb{N}$ tels que $s + r \leqslant n$ uniquement déterminés par A tels que A soit congruente à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & -I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Les orbites sont caractérisées par les couples (s, r), appelés signatures des formes quadratiques associées.*

Proposition 41. *On a en fait :*

$$s = \max\{\dim F \mid F \in \mathcal{P}\} \quad \text{et} \quad t = \max\{\dim F \mid F \in \mathcal{N}\}$$

où $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{N}$) désigne l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ sur lesquels la restriction de la forme quadratique est définie positive (resp. négative).

Corollaire 42. *Deux matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont congruentes si et seulement si elles ont même signature.*

Théorème 43. *Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, il existe $r \in [\![1, n]\!]$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que A soit congruente à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.*

Développements

- Générateurs de $\mathcal{GL}(E)$ et de $\mathcal{SL}(E)$ (10,11,12) [Per96]
- Décomposition polaire (14) [CG13]
- Réduction des matrices orthogonales (34,35,36,37) [Gou94, CG13]

Références

[CG13] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1*. Calvage et Mounet
[Per96] D. Perrin. *Cours d'Algèbre*. Ellipses
[Gou94] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre*. Ellipses, 2e édition
[Rom20] J.-E. Rombaldi. *Algèbre et Géométrie*. DeBoeck
[Ulm12] F. Ulmer. *Théorie des groupes*. Ellipses